

III.A 角度測量原理解說

[a.1. 前言](#)

[a.2. 經緯儀介紹](#)

[a.3. 重要名詞解釋](#)

[a.4. 水平角觀測](#)

[a.5. 垂直角觀測](#)

[a.6. 經緯儀儀器誤差](#)

3.A 原理解說

a.1 前言

角度測量使用之儀器為經緯儀，其主要用途在於測量兩點間之水平角 θ 與垂直角 α ，如圖 3-1 所示。此外經緯儀亦可用來進行定線測量，或代替水準儀進行直接水準測量。電子經緯儀若附有電子測距儀者，尚可用來測量距離。本章介紹則以電子經緯儀為主。

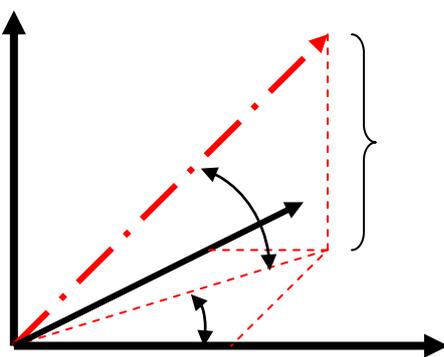


圖 3-1、測量基本觀測量—角度與距離

a.2 經緯儀介紹

a.2.1、經緯儀基本構造

一般經緯儀包含儀器上部、儀器下部及基座三部分：

✦ 經緯儀上部：可繞直立軸在水平面內旋轉

上盤、內軸、垂直角度盤 (Vertical circle)、望遠鏡、管水準器

✦ 經緯儀下部：可繞基座中心旋轉

下盤、外軸、水平角度盤 (Horizontal circle)

✦ 基座：用以固定儀器於三角架上

光學對心器、腳螺旋、中心固定螺旋、底板、圓盒水準器

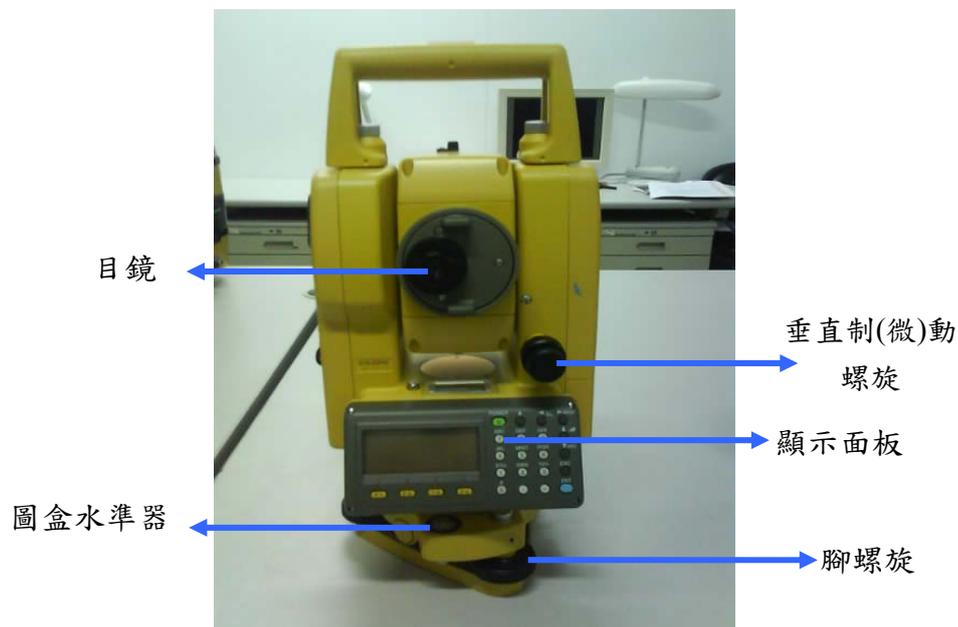


圖 3-2、Topcon GTS230 電子經緯儀/全測站之基本構造

a.2.2、經緯儀基本軸及設置條件

經緯儀之主要基本軸有視準軸 SS 、直立軸 VV 、橫軸 HH 、水準軸 LL ，如圖 1-3 所示。其相互間之基本幾何關係為

- ⊕ 水準軸垂直直立軸 ($LL \perp VV$)
- ⊕ 橫軸垂直直立軸($HH \perp VV$)
- ⊕ 視準軸垂直橫軸($SS \perp HH$)
- ⊕ 橫軸、視準軸及直立軸交於同一點
- ⊕ 直立軸通過水平度盤中心

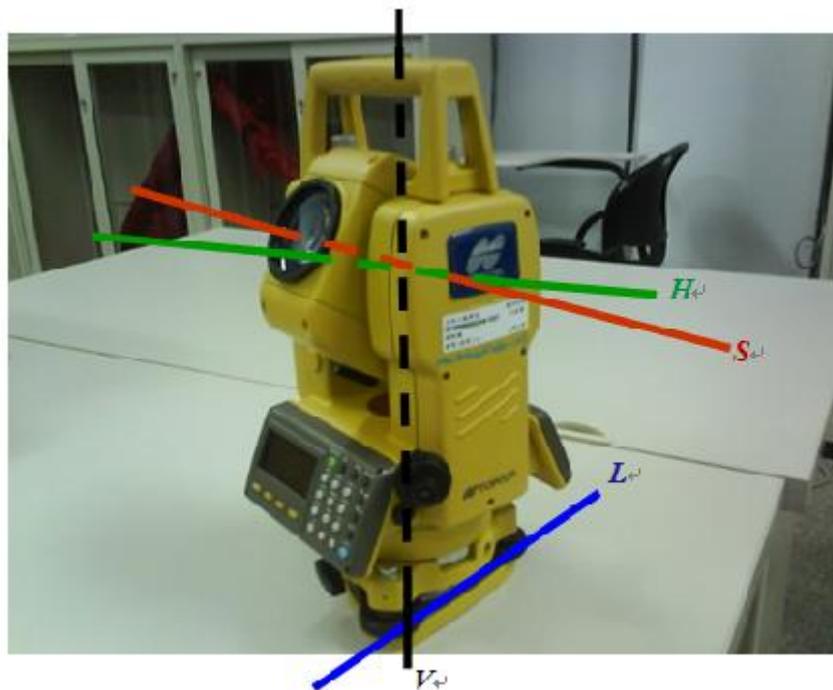


圖 3-3、經緯儀之基本軸

a.2.3、經緯儀種類

按儀器構造不同區分：

- ✦ 複測經緯儀 (Repeating Theodolite)：下盤可以跟著上盤旋轉，又稱雙軸經緯儀，一般普通經緯儀屬之。
- ✦ 方向經緯儀 (Directing Theodolite)：下盤不能隨上盤旋轉，又稱單軸經緯儀，一般度盤刻畫較精細，故多屬精密經緯儀。

按讀數裝置不同區分：

- ✦ 游標經緯儀 (Vernier Theodolite)：度盤直接刻畫於金屬或玻璃版上，利用游標裝置讀數，無法精密。
- ✦ 光學經緯儀 (Optical Theodolite)：度盤刻畫於玻璃盤面，藉光學組合稜鏡讀數。
- ✦ 電子經緯儀 (Electronic Theodolite)：度盤為光柵度盤或絕對編碼度盤，透過紅外線辨識，直接以數字顯示於顯示幕

按精密度不同區分：

- ✦ 普通經緯儀 (工程經緯儀)：放大倍率約為 20~30 倍，度盤最小刻度為 10"、20"、30" 或 1。
- ✦ 精密經緯儀 (大地經緯儀)：放大倍率約為 30~40 倍，度盤最小刻度為 1" 或 0.1"，大部分屬於方向經緯儀。

a.2.4、經緯儀的安置

經緯儀安置必須符合的兩個條件：

- ✦ 定心：利用光學對準器對準地面測點，使經緯儀中心與地面測點一致。
- ✦ 定平：調整水準管氣泡在任何方向中皆居中，使水平度盤真正水平。

經緯儀之架設程序 (採漸近法)：

- ✦ 架設三角架：使腳架頂大約水平
- ✦ 約略定心：擺動腳架腿對心
- ✦ 約略定平：伸縮腳架腿使圓盒氣泡居中
- ✦ 精確定心：微鬆直立軸螺旋，平移儀器使之精確對心
- ✦ 精確定平：調整腳螺旋，使水準管氣泡居中。

經緯儀架設之檢查：

- ✦ 檢查定平：不管在任何方向，水準管氣泡皆居中。
- ✦ 檢查定心：光學對準器中心仍對準定位。

a.2.5、經緯儀之半半改正

當水準軸與直立軸不互相垂直時，則水平度盤在任意方向將無法一直保持水平。如圖 3-4 所示，雖然在某一方向可調整水準管氣泡使之保持水平，但轉動 180 度之後，因直立軸偏差 α 角而造成視準軸方向偏差 2α 角。當有上述這種情形時，必須進行半半改正。如圖 3-5 所示，所謂半半改正為先調整水準管改正一半的偏差量，另一半之偏差量則藉由調整水準管校正螺絲進行改正。

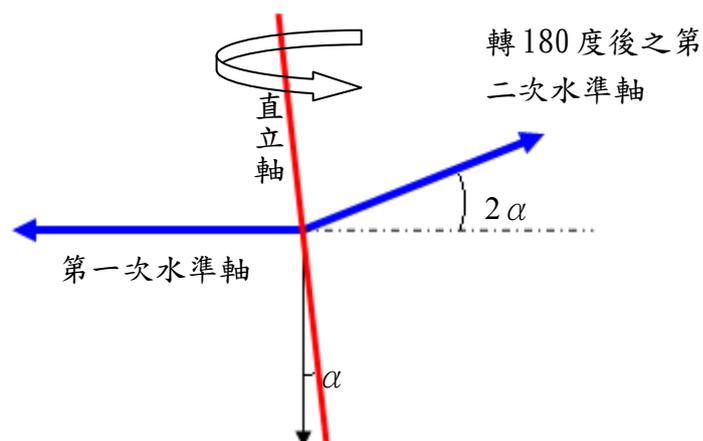


圖 3-4、經緯儀之水準軸與直立軸不互相垂直所造成之誤差

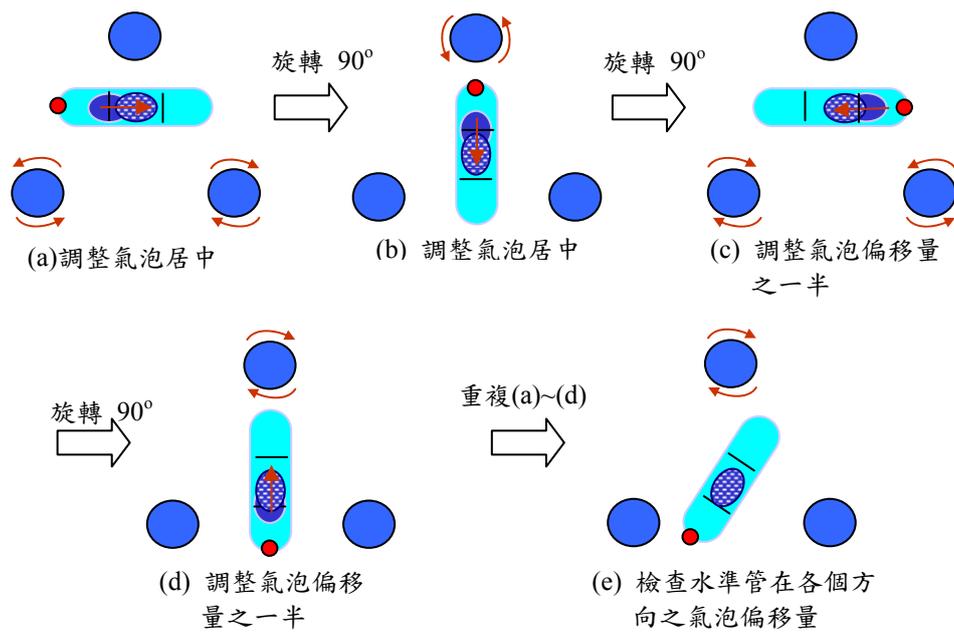


圖 3-5、經緯儀之半半改正步驟

a.3 重要名詞解釋

- ✦ 定心：利用光學對準器對準地面測點，使經緯儀中心與地面測點一致。
- ✦ 定平：調整水準管氣泡在任何方向中皆居中，使水平度盤真正水平。
- ✦ 正鏡(normal position)：觀測時望眼鏡位於垂直度盤之右者，謂之正鏡。
- ✦ 倒鏡(inverted position)：觀測時望眼鏡位於垂直度盤之左者，謂之倒鏡。
- ✦ 測回(set)：觀測時依各方向正倒鏡各觀測一次，謂之一測回。
- ✦ 縱轉(plunging the telescope)望眼鏡繞橫軸旋轉 180 度，然後繞直立軸旋轉，對準原目標。
- ✦ 水平旋轉(horizontal rotation)：望眼鏡繞直立軸旋轉。
- ✦ 動上盤(upper motion)：上盤部分繞內軸旋轉。
- ✦ 動下盤(lower motion)：線盤部分繞外軸旋轉。
- ✦ 垂直旋轉(vertival rotation)：望眼鏡上下俯仰之動作。
- ✦ 測站(station)：安置儀器之測站。

a.4 水平角觀測

水平角為水平面上兩直線間之夾角，使用經緯儀觀測水平角時，必須使水平度盤保持水平，且儀器中心與地面測點必須在同一條垂直線上。同時觀測遠方觀測點目標亦應精確標定。本章節之主要介紹為電子經緯儀，而電子經緯儀之角度測量以單腳法(正倒鏡觀測)實施，將介紹單腳法的施測方法。

a.4.1、電子經緯儀之角度測量法-單角法(正倒鏡觀測)

單角法常用於一般測角及導線測量。如圖 3-6 所示，於 S 點安置經緯儀，調整儀器為正鏡狀態，先瞄準 SA 方向，為此單角之起始方向，又稱為後視方向(back sight)，設所得讀數為 H_A ，再將儀器旋轉至 SB 方向，為此單角之終邊方向，設讀數為 H_B 。複於 SB 方向，將經緯儀設為倒鏡狀態，瞄準 SB 方向後讀數得 H'_B ，再將儀器旋轉至 SA 方向讀數得 H'_A ，依序記錄於表 3-1 之水平角觀測紀錄表中：

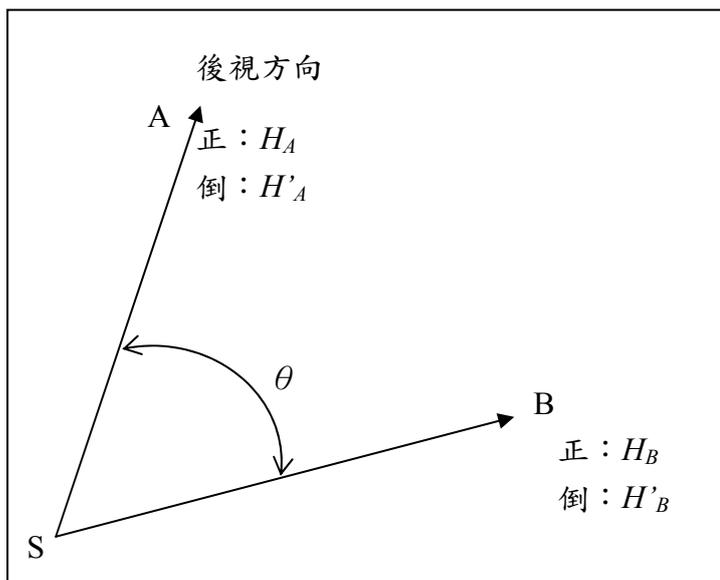


圖 3-6、單角法示意圖

表 3-1 水平角觀測紀錄表

測站	觀點	鏡位	讀數						正倒鏡平均值			角 度			備 註
			游標 A			游標 B			AB 平均			o	'	"	
			o	'	"	'	"	o	'	"					
S	A	正	15	27	50										
		倒	195	28	05					15	27	58			
	B	正	246	59	55										
		倒	67	00	15					247	00	05	231	32	

我們可以於表 3-1 中直接計算 $\angle ASB$ 之水平角，理論上正倒鏡觀測值將相差 180 度，故須先檢查各個方向之正倒鏡觀測值之差異量是否在容許誤差內（10 秒、20 秒，視儀器而定），接著將倒鏡度數檢掉 180 度之後，與正鏡觀測值一起

計算其平均值，記錄於表中，最後以 SB 方向之正倒鏡平均值減掉 SA 方向之正倒鏡平均值，即得 $\angle ASB$ 之水平角。

另一種計算方式為先分別計算正鏡及倒鏡之平均值：

$$\text{正鏡： } \theta_1 = H_B - H_A \quad (3.1)$$

$$\text{倒鏡： } \theta_2 = H'_B - H'_A \quad (3.2)$$

再取其平值即為 $\angle ASB$ 之水平角度值：

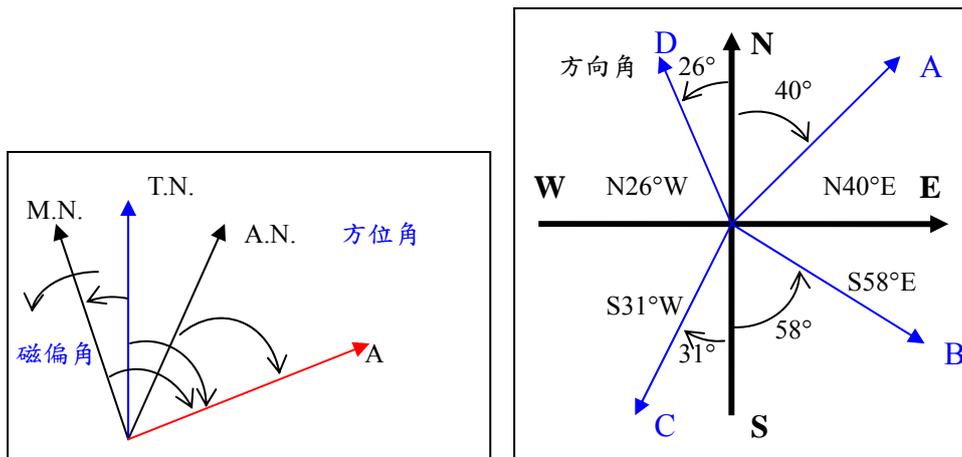
$$\theta = \frac{1}{2}(\theta_2 + \theta_1) \quad (3.3)$$

a.4.2、水平角度計算

方位角與方向角之定義：

於地球上進行水平角測量或計算時，必須先定義一角度基準方向。通常一測線之方向(Directions)係以地球子午線(Meridian)為基準，並以方向角(Bearing)或方位角(Azimuth)表示之，說明如下：

- ✦ 子午線：地球表面上通過觀測點與南北極之大圓。
- ✦ 真子午線 (True meridian)：不受時間或其他因素影響而變動。
- ✦ 磁子午線 (Magnetic meridian)：依據磁針之方向定義南北方，此方向將隨地球磁場之變化而改變。
- ✦ 方位角：由子午線之一端(北方)順時針方向旋轉至某測線之夾角，如圖 3-7(a)所示，其定義依真北、磁北或假設北方而有所不同：即真方位角、磁方位角及假設方位角。
- ✦ 方向角：由子午線之北方或南方起算，順時針或逆時針與測線所夾之銳角，如圖 3-7(b)所示。



(a) 各種方位角之定義 (b) 方向角之定義

圖 3-1、方位角與方向角示意圖

方位角計算：

如圖 3-8 所示已知測站座標 (N_A, E_A) 與觀測點座標 (N_B, E_B) ，則可計算

\overline{AB} 方向之方位角，依照三角幾何可推得方位角之計算公式如下：

$$\varphi_{AB} = \tan^{-1} \left(\frac{|\Delta E|}{|\Delta N|} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{|E_B - E_A|}{|N_B - N_A|} \right) \quad (3.4)$$

由方位角之定義可知其範圍應為 $0^\circ \leq \varphi_{AB} < 360^\circ$ ，然而根據公式(3.4)所計算出之角度係在 0 度與 90 度之間，故需再根據橫縱距 ΔN 與 ΔE 之正負符號，來判斷方位角值，其計算公式如表 3-2 所示。

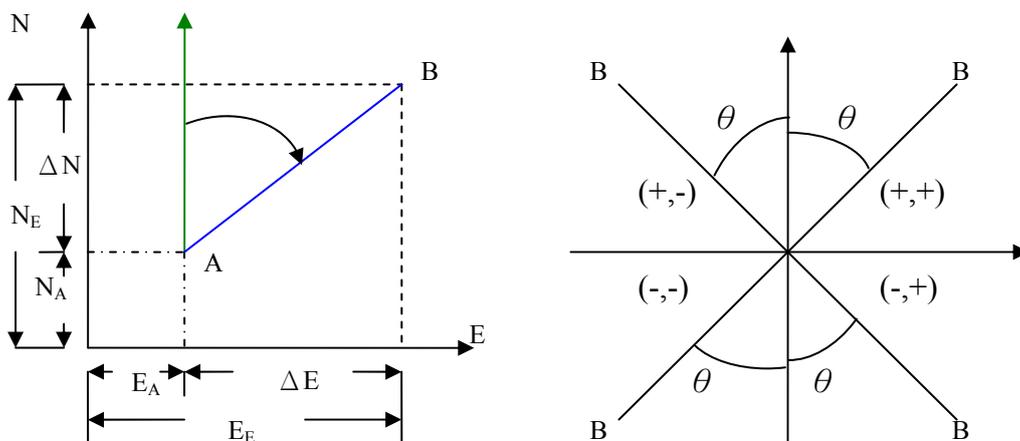


圖 3-8、方位角計算示意圖

表 3-2 ΔN 與 ΔE 之正負符號與方位角之關係

象限	ΔN	ΔE	方位角
I	+	+	$\varphi_{AB} = \theta$
II	+	-	$\varphi_{AB} = 180^\circ - \theta$
III	-	-	$\varphi_{AB} = 180^\circ + \theta$
IV	-	+	$\varphi_{AB} = 360^\circ - \theta$

方位角及座標計算

如圖 3-9 所示， A, B 為已知控制點，若以 AB 為後視方向，觀測 $\angle BAP$ 及 AP 水平距離，如何求出 P 點座標？

- 首先依據公式(3.4)由 A, B 座標計算方位角 φ_{AB} ，加上 $\angle BAP$ 之夾角 θ ，即得 AP 方向之方位角：

$$\varphi_{AP} = \varphi_{AB} + \theta \quad (3.5)$$

- 接著由 AP 水平距離及 AP 方向之方位角計算 A, P 兩點之橫縱距，既可計算 P 點座標：

$$\begin{aligned} \Delta N_{AP} &= \overline{AP} \cdot \cos \varphi_{AP} \\ \Delta E_{AP} &= \overline{AP} \cdot \sin \varphi_{AP} \end{aligned} \quad (3.6)$$

得

$$\begin{aligned} N_P &= N_A + \Delta N_{AP} \\ E_P &= E_A + \Delta E_{AP} \end{aligned} \quad (3.7)$$

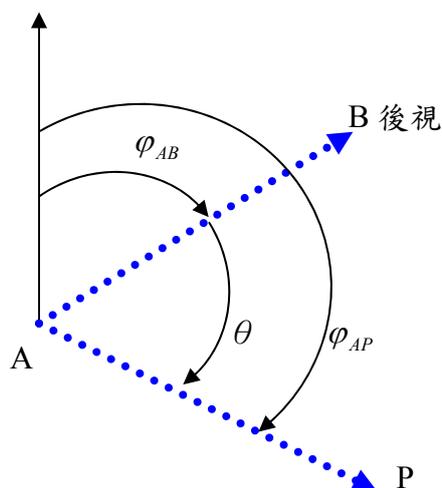


圖 3-9、方位角計算及座標計算

a.5 垂直角觀測

a.5.1、垂直角觀測方式

經緯儀視準線與水平線在垂直面上所夾之角度，稱為垂直角(或稱為縱角)。垂直角依照儀器設計的差異，有以下不同的定義：

- ✦ 仰角 α (Elevation angle)：由水平線起算，向上為仰角，通常以正號表示。
- ✦ 俯角 β (Depression angle)：由水平線起算，向下為俯角，通常以負號表示。
- ✦ 天頂距 Z ：由天頂向下旋轉之角度。天體距觀測者「天頂」(Zenith)之角距離，此角之量度係所測方向與天頂方向之夾角或弧長；為「垂直角」(Elevation angle) 之補角，如圖 3-10。

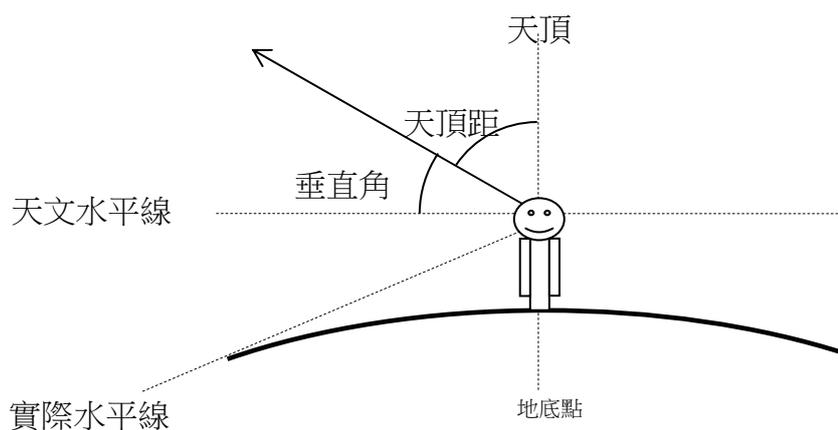


圖 3-10、天頂距與垂直角關係

如圖 3-11 所示，天頂距與俯仰角之關係如下所示：

$$Z - \beta = 90^\circ \quad (3.8)$$

$$Z + \alpha = 90^\circ \quad (3.9)$$

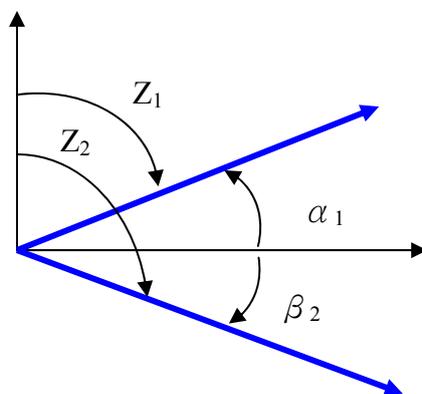


圖 3-11、天頂距與俯仰角之關係

垂直角觀測紀錄則可以參考表 3-3，以 Wild T2 經緯儀為例，若儀器安置於 S 點，觀測 P 點，正倒鏡分別觀測天頂距讀數，及量得儀器高，如表 3-3 所示。

表 3-3 垂直角觀測紀錄表

測 站		視 點		鏡位	垂 直 角 (天 頂 距) 讀 數			成 果		備 註
點號	儀器 高度	點號	覘標 高度		°	'	″	天頂距	垂直角	
S	1.45 m	P	3.28 m	正	79	16	-10 30	79°16'20"	10°43'40"	
				倒	280	43	-10 50			
				正						
				倒						

a.6 經緯儀儀器誤差

經緯儀的四個主軸：直立軸、水平軸(橫軸)、水準軸及視準軸，必須符合一定之基本幾何條件，否則即產生儀器誤差。經緯儀儀器誤差大致有以下幾種：

- ✦ 視準軸誤差
- ✦ 橫軸誤差
- ✦ 直立軸誤差
- ✦ 上盤偏心之誤差
- ✦ 視準軸偏心之誤差
- ✦ 水平度盤刻劃之誤差

視準軸誤差 (Error of Collimation)

視準軸誤差的主要成因是視準軸不垂直於橫軸，如圖 3-11 所示，當視準軸誤差為 C 時，其影響水平方向之誤差為 W_C ，當瞄準點 P 時的垂直角為 h 時，依球面三角公式可知

$$W_C = \frac{C}{\cosh} = C \cdot \sec h \quad (3.10)$$

此時，視準軸誤差所造成的水平角誤差為 $W_C - C$ 。由圖 3-12 可知，觀測目標垂直角越大時，其影響水平角越大。且當一水平角之兩測線等高時，視準軸誤差對該水平角並無影響。此外，若再以倒鏡觀測點 P ，可以發現視準軸誤差 C 的符號正好與正鏡時相反，故採正倒鏡觀測取平均值時可以消除視準軸誤差。

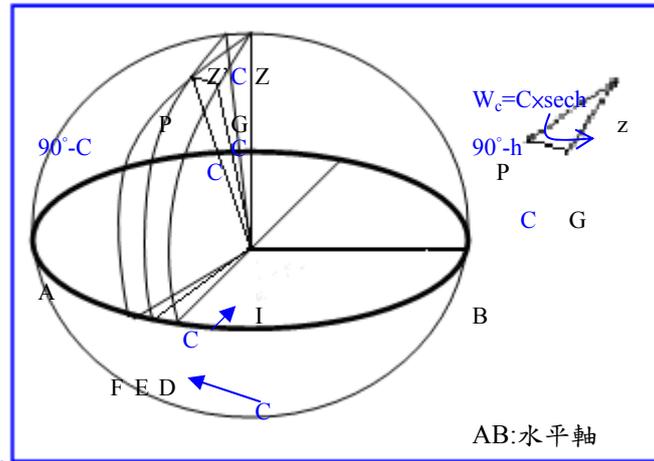


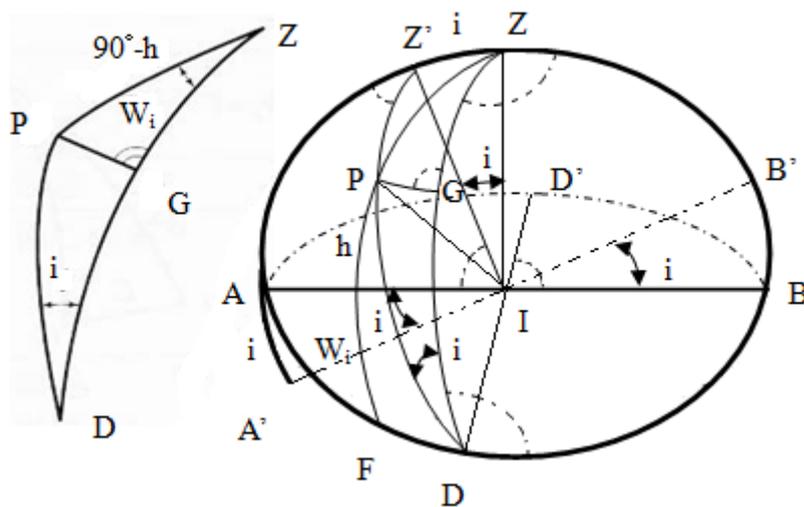
圖 3-12、視準軸誤差示意圖

橫軸誤差：

顧名思義，橫軸誤差主要是因為橫軸不水平所造成，如圖 3-13 所示，橫軸誤差 i 影響水平方向之誤差為 W_i ，當瞄準點 P 之垂直角為 h 時，依球面三角公式可知，其所引起的水平角誤差為

$$W_i = i \cdot \tan h \quad (3.11)$$

由式(3.11)可知，觀測目標垂直角 h 越大時，其影響水平角越大。若一水平角之兩測線等高時，視準軸誤差對該水平角並無影響。又若再採倒鏡觀測 P 點，可以發現橫軸誤差 i 的符號正好與正鏡相反，故採正倒鏡觀測取平均值時可以消除橫軸誤差。



A' B' :傾斜之水平軸

圖 3-13、橫軸誤差示意圖

直立軸誤差

直立軸誤差係由直立軸位處於垂直位置所造成，如圖 3-14 所示，直立軸誤差 V 影響水平方向之誤差為 W_V ，當瞄準點 P 之垂直角為 h 、觀測方向為 u 時，所引起之直立軸誤差為

$$W_V = u - u' = V \cdot \tan h \cdot \sin u \quad (3.12)$$

由上式可知，直立軸誤差 V 與視線之高度 h 及觀測方向 u 有關。因此直立軸誤差不能藉由正倒鏡觀測取平均值來消除。

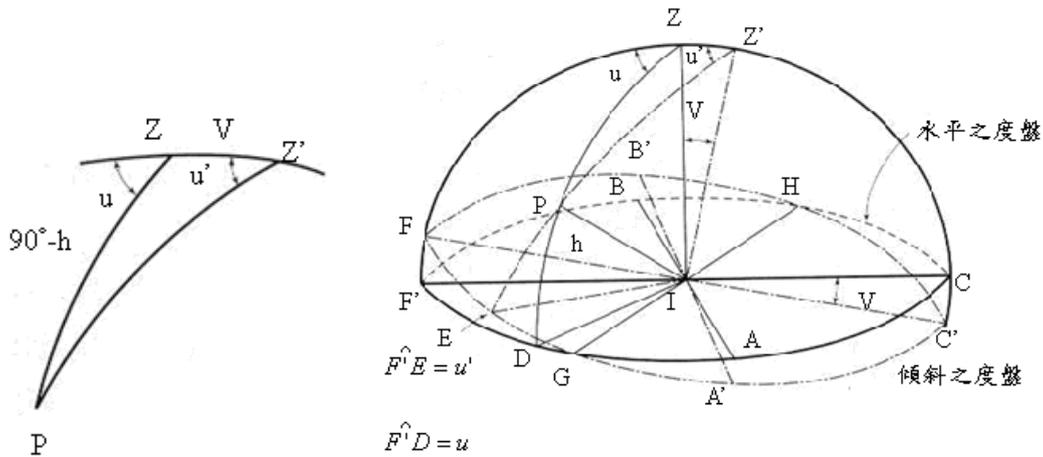


圖 3-14、直立軸誤差示意圖

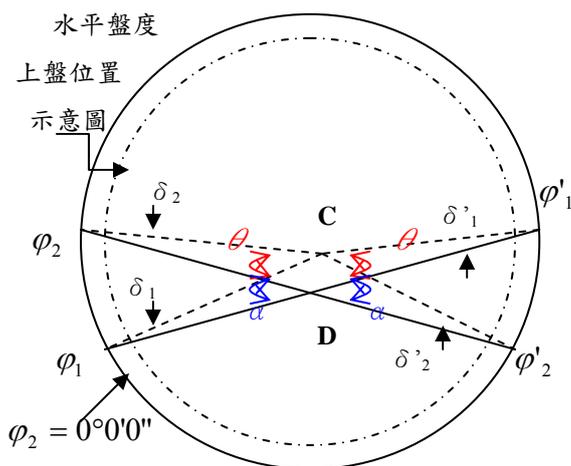
上盤偏心誤差：

當上盤直立軸旋轉中心與度盤中心不符時，有偏心誤差讀數產生，如圖 3-15 所示， D 為上盤中心位置， C 為度盤中心位置，正確之水平角為 α ，因 D 與 C 不相重合，讀到的讀數為 θ 。如圖 3-14 所示，上盤偏心誤差可由雙游標讀數消除之，說明如下：

於游標 A 讀得角度為 $\theta = \varphi_2 - \varphi_1$ ，又 $\alpha + \delta_1 = \theta + \delta_2$ ，故得 $\alpha = \theta + \delta_2 - \delta_1$ 。又於游標 B 讀得 $\theta' = \varphi_2' - \varphi_1'$ ，及 $\alpha' = \theta' + \delta_2' - \delta_1'$ 。又由等腰三角形知 $\delta_1 = \delta_1'$ 及 $\delta_2 = \delta_2'$ ，且 α 及 α' 為對頂角，故

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha' = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha') = \frac{1}{2}(\theta + \theta' + \delta_2 - \delta_1 + \delta_2' - \delta_1') \\ &= \frac{1}{2}(\theta + \theta') = \frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_2') - \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_1') \end{aligned} \quad (3.13)$$

由上可知，雙游標經緯儀可分別讀取其平均值，以取消上盤偏心之誤差。光學經緯儀則藉由調整測微符合螺旋使相差 180° 刻畫線成像在一起，亦可消除上盤偏心之誤差。



C:度盤中心 D:上盤中心 C、D之距離甚小

圖 3-15、上盤偏心誤差示意圖

視準軸偏心之誤差

若視準軸不在直立軸中心之延長線上，則會產生視準軸偏心之誤差，如圖 3-16 所示， P 為直立軸中心， $\overrightarrow{PP_1}$ 與 $\overrightarrow{PP_2}$ 為無誤差時之觀測方向，所得正確角度應為 θ 。然而因為視準差之偏心誤差 e ，使得正倒鏡所觀測之角度分別為 θ_1 及 θ_2 ，由圖 3-15 可知，

$$\text{正鏡： } \theta = \theta_1 + \alpha - \beta \quad (3.14)$$

$$\text{倒鏡： } \theta = \theta_2 + \beta - \alpha \quad (3.15)$$

取正倒鏡取平均得：

$$\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad (3.16)$$

故正倒鏡觀測取平均值可以消除視準軸偏心誤差。

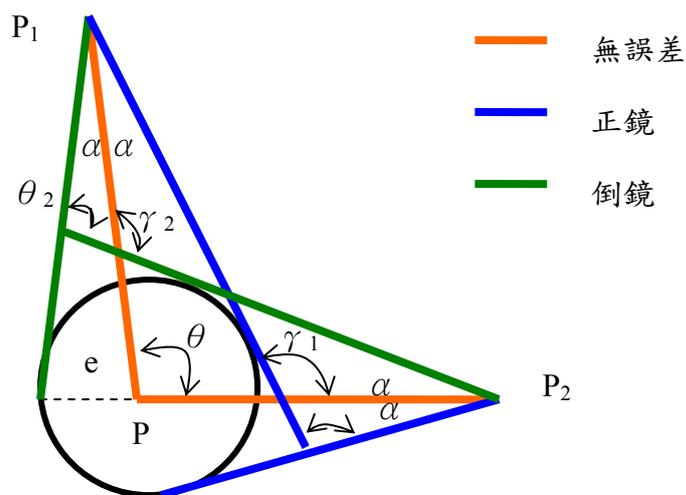


圖 3-16、視準軸偏心誤差示意圖

經緯儀之誤差及其消除法

經緯儀之儀器誤差與其消除法整理於表 3-4 中。

表 3-4、經緯儀之儀器誤差與其消除法

種類	成因	消除方法
視準軸誤差	視準軸不垂直於橫軸	正倒鏡觀測取平均
橫軸誤差	橫軸不水平	正倒鏡觀測取平均
視準軸偏心誤差	視準軸不在直立軸中心之延長線上	正倒鏡觀測取平均
水準軸誤差	水準軸不垂直於直立軸	(1)半半改正法 (2)正確安置儀器水平
度盤偏心誤差	上盤直立軸旋轉中心與度盤中心不符	(1) A, B 游標取平均 (2)儀器讀數裝置自動消除
度盤刻劃誤差	度盤刻劃不均勻	以方向組法或複測法觀測，取多次平均
十字絲偏斜誤差	十字絲環產生偏差	正倒鏡觀測取平均
指標差	垂直度盤指標不在固定位置	正倒鏡觀測取平均